Rivista "Umana"
nov.-dic. - 1963

I PROBLEMI DELL'OGGI

Mutamenti nel pensiero matematico

di ANGELO CRESCINI

Nell'epoca in cui viviamo la sensibilità per le scoperte scientifiche è cresciuta enormemente. Il nome stesso di « scienza » suscita anche nell'animo di persone mediocremente informate echi e risonanze profonde. Senza dubbio tra i motivi più determinanti e validi vanno segnalati il successo raggiunto dalle scoperte scientifiche, la profonda trasformazione da esse operata nell'ambiente in cui si svolge la nostra vita esteriore, le enormi possibilità che la scienza ha donato all'uomo: possibilità di costruzione e possibilità di distruzione. Pare addirittura che ad un certo punto tali possibilità abbiano tentato di superare il potere di controllo a disposizione dell'uomo stesso, quasi che la scienza si sia ingigantita al di sopra di chi l'ha partorita, fino quasi a minacciarne l'esistenza.

Questa facile suggestione esercitata dalle scoperte della scienza ha spinto sempre più gli autentici competenti, e, in maniera più ridotta, anche coloro che non lo sono, a tentare di scandagliare la natura della scienza considerata in se stessa, a capirne il significato, a scrutarne le scaturigini, a coglierne le direttrici di marcia, i possibili sviluppi. E tutto questo non soltanto nei confronti della scienza applicata, ossia della scienza, per così dire, più vistosa, come la fisica la chimica la biologia, ma addirittura di quella scienza più austera, più severa, che sta alla base di tutte le scienze applicate, la scienza matematica.

La matematica appare ai più immobile, perfetta e completa in se stessa, non suscettibile di progressi, in altre parole, saltata fuori dalla testa dell'uomo come Minerva dalla testa di Giove, vestita e armata di tutto punto. Ma questa è una falsa immagine della matematica. La quale invece è un organismo vivente, cresce, si sviluppa, ha dei momenti di stasi, addirittura di crisi, da cui però emerge poi con rinnovata vitalità sviluppandosi ancor più rapidamente e fecondamente di prima.

E non deve far meraviglia: non è anche la scienza una dimensione dello spirito umano in marcia per il dominio sempre più completo della natura, e quindi per l'acquisizione di una sempre più alta e vasta libertà? Come vi sono spazi sempre più vasti attorno al nostro essere fisico, che costtiuiscono quasi una fascia di tenebra che ci avviluppa e imprigiona, così nel nostro essere interiore vi sono difficoltà ancora più intricate e subdole, che ci coartano in un modo ancora più intollerabile del primo. Le due fascie di oscurità non sono indipendenti l'una dall'altra, sono intrinsecamente legate, e, all'opposto di quanto si potrebbe supporre in un primo momento, non è la fascia esterna che va lacerata per prima perchè anche l'altra, quella interiore, si dissolva, ma è vero il contrario. Si devono prima diradare le difficoltà di ordine mentale (nel caso che stiamo trattando, quelle matematiche), e allora soltanto, in un secondo tempo e in conseguenza, potremo superare le barriere esterne che ci sono elevate contro dalla vastità degli spazi e dall'impenetrabilità della materia. Ricorderò sempre il giorno in cui, studente di matematica all'Università di Roma, ho assistito ad una conferenza tenuta nell'ottobre 1949 da Enrico Fermi, che aveva accolto l'invito rivoltogli dalla « Fondazione Donegani » di venire in Italia. Ad un certo momento della sua esposizione di un argomento di fisica atomica, egli si rivolse ai professori di matematica presenti, e disse: « A questo punto noi fisici non possiamo più andare avanti, finchè voi non avete risolto questo problema di matematica ». Era la dichiarazione, in un caso particolare, della necessità di superare le barriere mentali per avere la possibilità di superare poi quelle esteriori, puramente fisiche.

Anche la scienza matematica dunque è in continuo sviluppo, ossia in una continua fase di superamento delle difficoltà che le si oppongono.

Lo si potrebbe vedere prendendo in mano un trattato di storia della matematica. Noi ci accontenteremo di accennare soltanto rapidamente ad alcune svolte più importanti di tale fascinoso cammino, prendendo lo spunto da un libro scritto da un professore dell'Università di Berlino, tradotto da poco nella lingua italiana (1).

La prima grande fase di sviluppo della scienza matematica dallo stadio infantile in cui si trovava presso i popoli antichi, Egizi e Babilonesi, allo stadio giovanile e pienamente conscio del pensiero greco, culmina nell'opera di Euclide. I suoi *Elementi* costituiscono il primo completo sistema deduttivo che, partendo da assiomi e postulati ritenuti evidenti, arriva, attraverso rigorose dimostrazioni, a tutti quei teoremi che abbiamo anche noi imparato sui bamchi della scuola. Gli studiosi, specialmente il Zeuthen, il Wilamowitz, e, da noi, il Frajese e il Geymonat, hanno

(1) - Herbert Meschkowski, *Mutamenti nel pensiero matematico*, trad. it. di Lucio Lombardo-Radice, ed. Boringhieri, Torino 1963.

visto nell'esigenza di assoluto rigore e nel procedimento rigidamente deduttivo della geometria di Euclide un chiaro influsso della filosofia di Platone, il quale intendeva trovare nel mondo delle idee quella purezza ed esattezza che non è possibile riscontrare nel mondo dell'esperienza sensibile.

Tale salto nella pura speculazione matematica ideale da quella empirica e pratica degli Egizi e Babilonesi è ovviamente giudicata in modo diverso da autori di tendenze diverse. Per Herbert Meschkowski, per esempio, esso costituisce, come si è detto, l'abbandono dello stadio infantile, e inoltre l'acquisizione « di un importante strumento di conoscenza » (p. 16), mentre L. Geymonat sottolinea invece l'aspetto negativo di una tale separazione della matematica, considerata come scienza in se stesso perfetta, dalle altre scienze empiriche imperfette. « Siffatta autonomia, egli scrive, fu un'illusione fatale, durata interi millenni, e costituì uno dei principali ostacoli al sorgere dello spirito scientifico moderno » (2). Non pare dubbio che trascurare l'indagine empirica per restringersi a quella puramente formale è una limitazione che va infranta, ma, d'altra parte, al rigore formale non si può arrivare coi procedimenti empirici.

Le divergenze segnalate non sono insanabili, perchè in fondo ambedue le opinioni vengono a ritrovarsi nell'esigeza che i fodamenti della matematica non si debbano ricercare in enti metafisici. E' ancora il Meschkowski che ce lo dice: « Le ricerche moderne sui fondamenti della matematica hanno in comune un punto: esse si sforzano di evitare elementi metafisici nella costruzione della matematica » (p. 168), e riporta una frase di F.W. Levi: « Il fare della matematica è un'attività umana, un'attività importante e necessaria, ma attività umana ».

Le ricerche moderne a cui allude il Meschkowski, si sono orientate in tre direzioni diverse, che insieme rappresentano quella che si potrebbe chiamare la fase adulta delle indagini sui fondamenti della matematica, ossia la fase critica. Si tratta delle tre scuole che oggi tengono il campo, e che l'autore espone in capitoli trasparenti: l'intuizionismo, il formalismo e il logicismo. Il primo è chiamato con tale nome, perchè ammette « l'intuizione primitiva » della numerazione alla base della costruzione dei vari sistemi matematici. Ogni elemento matematico però risulta valido solo se lo si può costruire. L'infinito attuale, per esempio, ossia che vi sia un'infinità di elementi o di numeri, è escluso, perchè tale infinità non la si può mai ottenere effettivamente numerando. Il formalismo rimprovera all'intuizionismo di conservare tracce di incontrollabile metafisica in sè, quell'intuizione appunto che è alla base delle sue costruzioni. Per il formalismo si deve escludere ogni significato intuitivo dagli elementi che entrano nel sistema matematico (anche geometrico) che si vuole costruire. Hilbert, il corifeo di tale scuola, afferma che « si deve poter dire ogni volta, in luogo di punti, rette, piani: « tavoli, sedie, boccali di birra ». Ma come si può costruire una geometria partendo da elementi che sono assolutamente senza significato? Hilbert risponde dicendo che l'unico significato attribuibile agli elementi deriva loro dalle proposizioni di partenza, i così detti assiomi, in cui tali elementi figurano. Per esempio, quando si dice che « due rette di un piano hanno un punto in comune », ecco che il punto viene a determinarsi, a « definirsi implicitamente » come ciò che è comune a due rette di un piano, e le due rette di un piano vengono contemporaneamente a determinarsi come ciò che ha un punto in comune, e nient'altro. L'insieme degli assiomi deve essere in grado di dare delle determinazioni sufficienti per poter dedurre l'intero sistema geometrico.

La terza scuola è chiamata logicismo, perchè ritiene che la matematica sia un ramo della logica. E' la prima scuola delle tre nominate che in ordine di tempo abbia affrontato il problema di fornire dei fondamenti validi alla matematica, ed espungere da essa tutte le contraddizioni che erano emerse a funestarla. E' la scuola di Dedekind, Frege, Russell, Carnap. Da essa soprattutto ricevette impulso quella logica matematica o logistica che pretende di essere il punto di arrivo del processo di sistemazione scientifica di tutta la logica. Non tutte le difficoltà furono superate dal logicismo, e quindi non è meraviglia che siano sorti il formalismo e l'intuizionismo dal tentativo di superarle. A loro volta tuttavia anche queste due scuole mostrano lati deboli che esigono ulteriori indagini. « Pure con tutti i successi dei metodi formalistici, afferma il Meschkowski, rimane insoddisfacente il fatto che gli assiomi, in questa concezione, appaiono come posizioni assolutamente arbitrarie » (3). E' sorto quindi un nuovo ultimo indirizzo, la « matematica operativa, »» che, a nostro modesto parere, riuscirà a chiarire molti problemi rimasti ancora oscuri.

Non possiamo addentrarci nelle discussioni piene d'interesse connesse a tali tentativi, ma non possiamo esimerci dall'accennare al fatto che sta all'origine di tutta la revisione dei fondamenti della matematica, soprattutto della geometria, e che quindi si può considerare come la più grande svolta del pensiero matematico moderno. Si tratta della costruzione delle geometrie non-euclidee. Tra i postulati da cui partiva la geometria di Euclide ve n'era uno. il quinto, che non s'imponeva coll'evidenza propria degli altri. Lo si può esprimere dicendo che « data una retta e un punto fuori di essa, si può condurre per questo punto una sola retta parallela alla retta data ». Lungo il corso dei secoli si sono versati fiumi d'inchiostro per poterlo dimostrare, e toglierlo così dall'alone di dubbio in cui si trovava. Anche matematici italiani del XVI e XVII secolo, come il Cataldi, il Giordano, e soprattutto Giacomo Saccheri (peccato che il Meschkowski non li consideri) vi hanno contribuito. Nel 1763 G.S. Klügel raccolse ottantadue tentativi di dimostrazione, tutti falliti. E' quindi comprensibile come Farkas Bolyai (1775-1856), padre di quel Giovanni Boylai che sarà destinato a risolvere il secolare problema, abbia così tentato di dissuadere il figliolo: « Tu non puoi mettere alla prova le parallele su quella via; io conosco questa via fino alla sua fine — anch'io ho misurato in lungo e in largo questa notte immensa: ogni luce, ogni gioia della mia vita si sono spente in essa —io ti scongiuro, in nome di Dio, lascia in pace la teoria delle parallele.. Mi ero proposto di sacrificarmi per la verità; sarei stato pronto a diventare un martire, solo che avessi potuto restituire la geometria alla stirpe umana mondata da

(2) - Il Pensiero Scientifico, Garzanti, III ed. 1958, p. 36.
(3) - Op. cit. pag. 159.

tale macchia... Io ho compiuto lavori spaventosi, giganteschi, ho fatto di gran lunga meglio di quanto fino ad oggi fosse stato fatto, ma non ho mai trovato un completo appagamento... Sono ritornato indietro sconsolato, quando ho visto che partendo dalla Terra non è possibile toccare il fondo di questa oscurità, compiangendo me stesso e tutta l'umanità ».

Il consiglio del padre, come spesso avviene, non fu seguito dal figlio, il quale, assieme al tedesco Gauss e al russo Lobacevski, scoperse le geometrie non-euclidee. Questi grandi matematici, non soltanto dimostrarono che il 5.o postulato era indimostrabile, ma partendo da postulati incompatibili con esso, ossia dalla negazione di tale postulato, costruirono altre due geometrie altrettanto valide come quella di Euclide. Un traguardo importantissimo era così raggiunto, e veniva piantato un nuovo gigantesco pilastro per le successive costruzioni: gli assiomi non erano più da considerare come verità assolute, evidenti, come riteneva Platone, ma come posizioni di partenza assunte liberamente dallo scienziato per la costruzione di sistemi sempre più coerenti e comprensivi.

Non è il caso di soffermarci su altri sbalorditivi risultati di altre parti della matematica, per esempio della teoria degli insiemi secondo la quale il numero dei punti di un piccolo segmento di retta è uguale al numero dei punti di tutta la retta, e questo a quello dell'intero piano. Diremo soltanto che, mentre tali risultati sembrano sconvolgere la nostra intuizione e la nostra logica, gettano invece su di esse fasci di luce capaci di illuminarle a giorno.

Angelo Crescini