ANGELO CRESCINI

CONTROVERSIE SUL CONCETTO DI NUMERO

Estratto da "Studia Patavina" - A. VIII - N. 1 - Gennaio-Aprile 1961

TIPOGRAFIA DEL SEMINARIO DI PADOVA

CONTROVERSIE SUL CONCETTO DI NUMERO

Nel secolo XIX la scienza matematica, enormemente arricchita dei numerosi apporti dei secoli precedenti e quasi divenuta instabile su fondamenti troppo esigui per la sua mole ormai imponente, riflettè su se stessa e s'impegnò ad una revisione critica di tutti i suoi concetti e principi.

Si iniziò colla geometria, in seguito alla scoperta delle geometrie non-euclidee. Queste geometrie portarono alla critica del concetto di spazio e dei sistemi assiomatici che ne rappresentano lo studio. Si elaborò così una geometria astratta generale i cui teoremi valgono per tutte e tre le geometrie metriche di cui si era ormai venuti a conoscenza.

In seguito il lavoro di revisione si estese al campo dell'aritmetica, ossia alla scienza dei numeri, perseguendo un duplice scopo:

1) Riduzione delle teorie dei numeri negativi, frazionari, irrazionali, ossia di tutti i numeri reali, ai numeri naturali, lavoro questo noto come « aritmetizzazione » delle matematiche, perseguito dalla scuola di Berlino (Weierstrass, Kronecker) nell'ultimo quarto del secolo XIX. Nello stesso tempo si elaborava sistematicamente la teoria dei numeri immaginari (W. R. Hamilton, H. Grassmann, H. Hankel, G. Frobenius).

2) Esame più approfondito della natura di numero naturale e degli assiomi che stanno alla base della sua aritmetica.

In questo studio esamineremo brevemente quest'ultimo punto fondamentale nella sua prima parte, considerandolo soprattutto dal punto di vista filosofico. Troveremo che il problema non è del tutto risolto e che le opinioni dei matematici e dei filosofi in proposito non sono concordi. Le controversie si sono diffuse in estensione e in vivacità. Ma è innegabile che il problema si è rivelato di sempre maggior interesse e importanza per la filosofia della scienza, a mano a mano che esso si andava delineando e chiarendo nel cozzo delle teorie contrastanti.

1. - La teoria empiristica del numero

Le recenti teorie razionalistiche del numero partono dalla critica alle teorie empiristiche che sotto l'influsso della filosofia inglese dei secoli XVII e XVIII si erano imposte nei trattati allora più diffusi di matematica. A. G. Castner definiva il numero intero « una moltitudine di cose della stessa specie » (1) e F. Soave definiva l'unità « una cosa sola o considerata come sola, per es. un uomo, un cavallo... » (2). Queste definizioni si ripresentano nel secolo XIX, per es. nei trattati di R. Baltzer e J. A. Serret. Ma chi veramente approfondì dal punto di vista filosofico questa teoria fu J. S. Mill, che pertanto ci soffermeremo a considerare con particolare attenzione.

Il Mill contesta che la proposizione « due e uno sono uguali a tre » sia la definizione del numero tre. Non si tratta di una convenzione stabilita per chiamare col nome più semplice « tre » l'espressione più lunga « due e uno ». D'accordo, i procedimenti dell'aritmetica e dell'algebra sembrano confermare quest'apparenza. Nella geometria si hanno davanti agli occhi o nell'immaginazione delle figure, ma nell'algebra si ha a che fare soltanto con segni, come « a » « b », i quali sembrano non rappresentare nulla e ridursi unicamente a puri simboli.

Ma tutto questo è contro il buon senso. In ogni calcolo aritmetico o algebrico è contenuta un'induzione reale, un'inferenza da certi fatti a certi altri, e ciò che nasconde quest'inferenza è il suo carattere comprensivo e quindi l'estrema generalità del linguaggio. In realtà « tutti i numeri devono essere i numeri di qualche cosa; non vi sono numeri astratti. Dieci deve significare dieci corpi, o dieci suoni, o dieci battiti del polso » (3). Siccome questi numeri possono essere numeri di qualsiasi cosa, si è ingenerata la falsa opinione che siano astratti. Falsa opinione indubbiamente, come risulta dal fatto che in ogni nostro ragionamento noi attribuiamo ai numeri le proprietà delle cose. Quando risolviamo un'equazione, ad *a, b, x,* applichiamo ad ogni passo la proposizione che cose uguali sommate danno cose uguali, e simili. Non si tratta quindi di proprietà di parole o di segni, come tali, ma di grandezze, ossia di cose. Queste operazioni divenute meccaniche non eccitano più le immagini corrispondenti, e quindi non sembrano più relative alla realtà empirica.

Ma un altro motivo, secondo Stuart Mill, ha tratto i matematici in

(1) *Anfangsgrunde der Arithmetik,* 1758, p. 21.
(2) *Elementi di aritmetica,* 1786.
(3) *Système de Logique,* Trad. Peisse, Paris, 1866, p. 291.

inganno. L'impressione cioè che, applicate alle cose, le proposizioni matematiche risultino identiche e quindi prive di significato. « Due sassolini e un sassolino sono uguali a tre sassolini » non appare come un'eguaglianza tra due collezioni di sassolini, ma un'assoluta identità. Essendo identici gli oggetti che entrano in considerazione e non avendo senso l'asserzione che gli oggetti sono gli stessi, sembra naturale pensare che la proposizione « due e uno sono uguali a tre » esprima la pura identità di significato dei due nomi. Ma l'opinione è falsa, per il Mill. Le parole « due sassolini e un sassolino » e le altre « tre sassolini » sono riferite senza dubbio al medesimo insieme di oggetti ma non al medesimo fatto fisico. « Sono i nomi dei medesimi oggetti, ma di questi oggetti in due stati differenti. Sebbene essi denotino le stesse cose, la loro connotazione è differente » (4). Tre sassolini in due parti separate e poi i medesimi in un medesimo gruppo non fanno la stessa impressione sui nostri sensi. Possiamo separare in due modi diversi tre oggetti cambiando l'ordine: $\underset{o}{\overset{o}{o}}$ opp. o o, o. L'asserzione che gli stessi oggetti possono provare l'una o altra sensazione, non è un'asserzione identica, è una verità induttiva. « E' su questa verità che è fondata la scienza dei numeri » (5). Si tratta dunque di verità puramente empiriche, e pertanto un nuovo ambiente fisico in cui venissimo a trovarci potrebbe renderci altrettanto comprensibile la proporzione $2 \times 2 = 5$, che ora ci appare inconcepibile e contraddittoria (6).

La critica non ha tardato a rivelare la fallacia di una simile concezione. Quale dato di fatto fisico, si chiede G. Frege (7), viene affermato nella definizione del numero 777865? Il Mill ha buon gioco citando solo il caso del numero tre. Egli potrebbe difendersi affermando che fino al numero 10 ci si debba basare su dati di fatto e poi formare l'11 ecc. mediante definizioni. Ma se si può formare mediante pure definizioni l'11 come 10 e 1, senza aver visto il corrispondente insieme, non v'è motivo perchè anche il 2 non si possa formare come 1 e 1. Se tutto fosse fisso al mondo e non si potessero separare i tre oggetti in due gruppi o o, o forse che allora 3 non sarebbe più uguale a $2 + 1$? Tante volte poi noi numeriamo le soluzioni di un'equazione o le categorie o le leggi di Keplero a cui non corrisponde nessuna impressione sensoriale. Applicando ad esse il concetto di numero, questo dovrebbe cambiare di significato,

(4) *Ibid.*, p. 294.
(5) *Ibid.*, p. 294.
(6) Cfr. *An Examination of Sir W. Ham. Philosophy*, p. 67 ss.
(7) *Die Grundlagen der Arithmetik*, con trad. inglese, II ed., Oxford, 1853, p. 67 ss.

come si dicesse che il concetto è azzurro. Inoltre al numero zero non corrisponde nessun sassolino. Il calcolo con lo zero quindi dovrebbe ridursi ad un gioco senza senso. In realtà però salta fuori da simili calcoli sempre qualcosa di razionale. Lo zero non è quindi senza senso per il fatto che non gli corrisponde nessuna impressione sensibile.

Il Frege conclude la sua critica dicendo che « se si chiama empirica una proposizione, perchè dobbiamo aver fatto delle osservazioni per diventar consci del suo contenuto, allora non si usa la parola empirico nel senso opposto ad apriori. Non si fa che esprimere un'affermazione psicologica, che riguarda soltanto il contenuto della proposizione; se questa sia vera non entra più in questione. In questo senso anche tutte le storie di Münchausen sono empiriche; infatti si deve aver osservato qualcosa per poterle inventare » (8).

In definitiva dunque le considerazioni del Mill possono servire al più solo a sottolineare il fatto che una base d'esperienza va necessariamente premessa alla formazione del concetto di numero e delle proposizioni che lo riguardano, ma quel concetto e quelle proposizioni non possono mai esaurirsi in essa. L'universalità e la necessità che implicano indicano che la sorgente da cui scaturiscono è di natura del tutto diversa.

2. - La dottrina psicologistica del numero

Una penetrazione della natura del numero sufficiente agli scopi dell'aritmetica e una giustificazione esauriente delle proprietà e delle leggi che gli sono caratteristiche, non è offerta neppure da quegli autori che lo riconducono alle rappresentazioni interne che ce ne facciamo.

Simili concezioni del numero vanno soggette a difficoltà analoghe a quelle riscontrate nella teoria empiristica. L'aritmetica sarebbe altrettanto vaga quanto le immagini a cui si vorrebbe ridurla. Senza entrare nel vivo di una discussione accesasi tra varie scuole psicologiche moderne, e che esula nella sua sostanza dalla trattazione che stiamo svolgendo, si potrebbe anche supporre che il pensiero matematico sia sempre accompagnato da rappresentazioni in intima vicenda tra di loro, ma serebbe grave errore confondere la soggettiva precarietà di simili rappresentazioni fluttuanti colla determinatezza e la necessità delle proposizioni aritmetiche. Quel contenuto della coscienza che è la rappresentazione, varia da individuo a individuo, invece le proposizioni matematiche, come $4 + 5 = 9$,

(8) *Op. cit.*, p. 12.

sono universali. Una proposizione poi, dice il Frege, non cessa di essere vera per il fatto che io non ci penso, come il sole non si annienta se chiudo gli occhi. E sarebbe davvero ridicolo quell'astronomo che temesse di estendere le sue conclusioni ai tempi passati per paura che qualcuno gli obietti: tu hai calcolato $2+2=4$, senza pensare che la rappresentazione del numero ha una sua storia e non è detto che anticamente non si avesse $2+2=5$ (9).

Inoltre, come osserva il Cassirer (10), non si può dire che una rappresentazione sia più grande o più piccola dell'altra, mentre i numeri lo sono.

Questi numeri stessi poi, se si riducessero al loro immediato essere dato nella coscienza individuale, potrebbero essere presenti soltanto in un insieme finito. Sappiamo invece che la matematica moderna non soltanto è riuscita a definire, con Bolzano, Cantor e altri, il concetto di numero infinito, ma vi ha elaborato sopra tutta una teoria imponente.

Ma dopo aver accuratamente distinto i due piani, si deve anche convenire che vi sono delle relazioni di cui si deve tener conto nella ricerca, tra il soggettivo accadere psicologico e le universali e necessarie leggi logiche e matematiche. Se in una fase dello sviluppo mentale è presente il concetto A e solo più tardi affiora il concetto B, questo secondo concetto non potrà essere un costitutivo del primo, ma in caso il primo del secondo. Secondariamente, e l'osservazione vale soprattutto per la matematica, potrebbe darsi che nella formazione del concetto di numero debba intervenire un'attività mentale di astrazione, di distinzione e di sintesi, necessaria non già nel suo effettivo, particolare accadimento, ma come esigenza fondamentale per il costituirsi del numero. Molti matematici hanno formulato questa condizione nella loro definizione di numero, senza scivolare nell'enunciazione dell'elemento psicologico soggettivo concomitante. Diverso è invece il caso di Kant e, in dipendenza da lui, di W. Hamilton. Nella definizione di numero data da Kant entra come costitutivo l'intuizione del tempo, precisamente nella « successiva addizione di uno a uno » (11). Il numero rimane così inquinato da un elemento impuro, il quale invece in realtà rimane, come si vedrà più diffusamente in seguito, del tutto estraneo, per comparire soltanto nella successiva operazione del contare.

In base alle gravi deficienze riscontrate, sia la teoria empiristica che quella psicologistica non potevano fornire una base valida alla elabora-

(9) *Grundlagen*... cit., p. VI.
(10) *Substanzbegriff und Funktionbegriff*, ed Cassirer, Berlin, 1923, p. 43.
(11) *Critica della ragion pura*, trad. it. di G. Gentile, Laterza, 1949, p. 171.

zione e allo sviluppo della matematica. Occorreva una teoria razionalistica. Fin dai suoi tempi Descartes si era espresso con chiarezza a questo riguardo: « Ita etiam cum numerus non in ullis rebus creatis, sed tantum in abstracto, sive in genere consideratur, est modus cogitandi dumtaxat: ut et alia omnia quae universalia vocamus. Fiuntque haec universalia ex eo tantum, quod una et eadem idea utamur, ad omnia individua, quae inter se similia sunt, cogitanda: ut etiam unum et idem nomen omnibus rebus per ideam istam repraesentatis imponimus, quod nomen est universale. Ita cum videmus duos lapides, nec ad ipsorum naturam, sed ad hoc tantum quod duo sint attendimus, formamus ideam eius numeri quem vocamus binarium; cum postea duas aves, aut duas arbores videmus... tantum quod duae sint consideramus, repetimus eandem ideam, quam prius, quae ideo est universalis; ut et hunc numerum eodem universali nomine binarium appellamus » (12).

La prima esplicita teoria razionalistica di numero fu elaborata da G. Frege nell'opera « Die Grundlagen der Arithmetik », apparsa nel 1884. Quest'opera tuttavia non attirò l'attenzione degli studiosi, finchè non la riscoprì B. Russel nel 1901. Nel frattempo due altre teorie imponenti, tra loro indipendenti, venivano elaborate, la teoria del Dedekind del 1887, e quella del Peano del 1889. Le esporremo nel loro ordine cronologico, e le faremo quindi seguire dalla dottrina del Frege, la quale, come dicevamo, ha trovato il suo completamento nella teoria di Bertrand Russel.

3. - La teoria di Riccardo Dedekind

Per la comprensione di questa teoria è necessario premettere alcune nozioni (13).

a) Il Dedekind chiama « cosa » (*Ding*) ogni oggetto del nostro pensiero, e dice che si ha una « classe » (*System*) ogni volta che cose diverse *a, b, c,* sono considerate sotto un medesimo punto di vista. Queste cose sono chiamate elementi della classe.

(12) *Principia philosophiae,* parte I, nn. 58-59.

(13) Il Dedekind espone la sua teoria nell'opera *Was sind und was sollen die Zahlen?,* Braunschweig, 1887, 2ª ed., 1911, trad. it. di O. Zariski, Roma, 1926. I numeri tra parentesi sono i numeri dell'opera. Cambieremo qualche volta la nomenclatura dell'autore per intonarla, assieme a quella dei successivi autori, a quella in voga nelle esposizioni matematiche italiane.

b) Data una classe A, si dice sua rappresentazione (*Abbildung*) ogni legge che faccia corrispondere ad ogni elemento di A un altro elemento a' e soltanto uno. La classe A' formata dagli a' si dice immagine (*Bild*) di A, e si indica con φ (A).

c) La rappresentazione si dice *equipotente* se la corrispondenza fra le classi A e A' è biunivoca. Le due classi si dicono allora equipotenti. Il Dedekind dimostra che l'equipotenza tra classi è una relazione riflessiva, simmetrica e transitiva.

d) Se una rappresentazione pone una corrispondenza tra una classe A e termini che appartengono soltanto alla classe stessa, si chiama *rappresentazione di A su se stessa*. Se rispetto a una rappresentazione di A su se stessa una parte K di A è tale che la sua immagine K' è una parte di K stessa, questa K si dice catena (*Kette*). Anche A dunque è una catena rispetto a φ.

e) Sempre riferendoci a una rappresentazione φ di A su se stessa, se a è una parte (anche un termine) di A, si dice *catena di a* (44) la classe a_0 costituita dagli elementi comuni a tutte le catene (una delle quali è la A) delle quali a è una parte. La classe a_0 evidentemente esiste, perchè la stessa classe a è una parte comune a tutte le dette catene.

Dopo queste definizioni fondamentali, il Dedekind chiama *infinita* una classe equipotente ad una sua parte propria e *finita* se non è equipotente ad una sua parte propria (64). Egli dimostra che vi sono classi infinite, perchè tale è la classe costituita da tutte le cose che possono essere oggetto del pensiero (66). Tra le classi infinite vi sono le *semplicemente infinite*. Una classe N si dice semplicemente infinita se ammette una rappresentazione equipotente su se stessa, rispetto alla quale la classe N risulti la catena d'un elemento non contenuto nell'immagine della classe. In altre parole quattro sono le condizioni per avere un sistema semplicemente infinito N (71):

α) La rappresentazione fa corrispondere ad ogni elemento a di N un solo elemento.

β) Quest'ultimo appartiene alla N stessa perchè la rappresentazione è su se stessa. Per queste proprietà, si può dire che la rappresentazione *ordina* gli elementi della classe N.

γ) Viene distinto nella classe un elemento fondamentale indicato col simbolo I, che non fa parte dell'immagine della classe.

δ) La classe N coincide con la catena dell'elemento fondamentale I, ossia è ciò che vi è di comune a tutte le catene relative alla rappresentazione φ.

Dopo queste premesse, ecco la definizione di numero ordinale: « Se nella considerazione di un sistema semplicemente infinito N, ordinato mediante la rappresentazione φ si astrae completamente dalla particolare natura degli elementi, si tien fisso solo il fatto che si distinguono e si considera solo le relazioni in cui sono posti vicendevolmente dalla rappresentazione ordinatrice φ, allora questi elementi si chiamano *numeri naturali* o *numeri ordinali* oppure anche *numeri* e l'elemento fondamentale I si chiama il *numero fondamentale* della *serie numerica N*. In riguardo a questa liberazione degli elementi da ogni altro contenuto (astrazione) si possono a buon diritto chiamare i numeri una libera creazione dello spirito umano. Le relazioni e le leggi che si deducono unicamente dalle condizioni α) β) γ) δ) del n. 71 e che perciò sono sempre le stesse per tutti i sistemi ordinati e semplicemente infiniti, qualunque siano i nomi dati accidentalmente ai singoli elementi, costituiscono l'oggetto immediato della *scienza dei numeri* o *aritmetica* » (n. 73).

L'immagine di un numero n si chiama numero successivo a n.

Da questa concezione del numero deriva come teorema, e non come postulato, il principio di induzione completa: Se di una classe fa parte il numero m, e se dall'ipotesi che ne faccia parte un numero, consegue che ne fa parte il numero successivo, a quella classe appartiene ogni numero della catena m_0 di m. Il Peano, i cui *Aritmetices principia* furono pubblicati, come si disse, due anni dopo lo scritto del Dedekind, ossia nel 1889, indipendentemente dalla conoscenza dell'opera di costui, presupponendo come nota la nozione di numero e assumendo come postulato il principio di induzione completa, potrà semplificare notevolmente l'apparato formale della teoria, ma dal punto di vista filosofico il suo lavoro risulterà di minore importanza e interesse della costruzione del Dedekind. Anche quest'ultima tuttavia, quantunque imponente e suggestiva, non va esente da ogni difficoltà.

Innanzitutto la sua definizione di insiemi finiti e infiniti. Col procedimento tipicamente realistico che parte dal generale per arrivare al particolare, egli definisce innanzitutto direttamente l'insieme infinito sulla base di una sua proprietà esposta dal Cantor e prima ancora dal Bolzano, e quindi solo indirettamente come insiemi non infiniti gli insiemi finiti. La proprietà, come si è già visto, consiste nell'essere un insieme infinito equipotente ad una sua parte, per cui il tutto non sarebbe maggiore della parte. Oltre alla difficoltà già rilevata dallo Zariski (14) per cui dalla definizione del Dedekind sarebbero escluse le classi infinite che eventual-

(14) *Op. cit.*, p. 168.

mente non godessero della proprietà assunta come definizione, col conseguente pericolo che qualche classe finita non sia corrispondente al senso comune che tale parola possiede, si ha anche l'inconveniente di non definire l'insieme finito, indubbiamente più immediato e sicuro di quello infinito, con una definizione altrettanto immediata e sicura (15).

Ma un'altra difficoltà ci sembra più grave, perchè riguarda la natura stessa dei numeri ordinali che Dedekind ha creduto di costruire. E' una difficoltà rilevata dal Russel (16). Il Dedekind ritiene che i termini delle relazioni ordinati in progressione si identifichino con gli ordinali proprio in base a quelle relazioni. « Se hanno da essere qualchecosa, scrive il Russel, essi devono essere qualcosa intrinsecamente; essi devono differire da qualche altra entità come i punti dagli istanti, o i colori dai suoni. Ciò che il Dedekind intendeva dare, era probabilmente una definizione per astrazione... Ma una definizione così fatta indica sempre qualche classe di entità le quali hanno (o che sono) una propria autentica natura, e che non dipendono logicamente dal modo in cui vennero definite. Le entità dovrebbero essere visibili, almeno all'occhio della mente; ciò che il principio asserisce è che, sotto certe condizioni, tali entità esistono, purchè si sappia dove cercarle. Ma non si può decidere senza esitazione se quando le avremo trovate esse saranno ordinali o cardinali, o perfino qualcosa di completamente differente. In ogni caso poi, il Dedekind non ci mostra che cosa sia ciò che tutte le progressioni hanno in comune, nè ci dà alcun motivo per supporre che questo *quid* siano i numeri ordinali, eccetto che tutte le progressioni obbediscono a tutte le leggi a cui obbediscono i numeri ordinali, ma questo proverebbe ugualmente bene che *qualunque* progressione data è ciò che tutte le progressioni hanno in comune ». In altre parole, la costruzione del Dedekind fornisce le leggi a cui i numeri ordinali obbediscono e che costituiscono la struttura essenziale dell'aritmetica, ma essi, in loro stessi, rimangono fuori della costruzione stessa. La quale pertanto può essere paragonata a una fedele biografia che ritrae tutte le vicende del personaggio, ma il personaggio rimane assente. Le cose che vengono ordinate sono troppo per essere i numeri anche se si considerano astraendo dal loro particolare contenuto, le relazioni ordinatrici sono invece troppo poco. Anche se si volesse concedere al Cassirer (17) che le cose di cui si fa parola nelle corrispondenze definienti il

(15) O. Zariski informa che R. Bettazzi (*Fondamenti per una teoria generale dei gruppi*, in « Periodico di matematiche », 1896, III e IV) avrebbe dato una definizione diretta dell'insieme finito, basandosi sulla teoria del Dedekind.

(16) *I Principi*... cit., p. 242.

(17) *Substanzbegriff*... cit., p. 47 ss.

numero, non sono poste come esistenze indipendenti, presenti avanti ogni relazione, ma che raggiungono la loro complessiva consistenza (in quanto questa entra in considerazione per il matematico), fin dal principio in e con le relazioni che di esse cose vengono espresse, e che esse quindi sono termini di relazioni, mai sciolte, ma date solo in ideale continuità tra di loro, non si avrebbe ancora il numero ordinale, ma solo cose ordinate in successione.

Le cose, sia pure astratte dal loro contenuto particolare, sono solo i soggetti della *numerazione,* possono cioè venire contate, ma non sono esse stesse i numeri. Anche il *posto* (1^0, 2^0, 3^0, 4^0...) che ogni cosa ottiene nel sistema in base alla rappresentazione ordinatrice, e che sembra il concetto più vicino a quello di numero ordinale, preso da solo, come posto, non è il numero ma solo la collocazione della cosa o qualcosa di simile. Per avere il numero ordinale è necessario considerare questo posto assieme agli altri posti oltre che ad essi *successivo*. Sono queste sintesi che vengono immediatamente ordinate dalle relazioni, anche se esse a loro volta si riferiscono alle cose che costituiscono l'insieme o classe. Sono le molteplicità inerenti alle classi i termini ordinati dalla successione, e non già le classi stesse, come sosterrà il Russel, o le cose che compongono le classi, come sostiene il Dedekind. Per avere il concetto del numero ordinale 5^0, posso sì pensarlo come successivo del numero ordinale 4^0, ma anche questo deve essere simultaneamente pensato come successivo agli altri 3. Naturalmente quando si eseguono solo meccanicamente le operazioni sui numeri, questi vengono più afferrati nel loro significato, ma questo significato deve essere sempre presupposto, sia pure una volta per sempre.

In definitiva, la definizione del Dedekind, per la sua incompletezza, non coglie appieno il concetto di numero, ma in caso quello più generico di successione. Dal punto di vista matematico, ma soprattutto dal punto di vista filosofico, dal quale l'autore nell'introduzione afferma di aver voluto considerare il problema, non sembra possa dirsi esauriente.

Simile incompletezza è riscontrabile anche nella teoria del Peano che passiamo ora a trattare brevemente.

4. - La teoria assiomatica del Peano

Nella sua impostazione fondamentale questa teoria non rappresenta un'assoluta novità (18). Essa espone in forma più cosciente e completa il

(18) La prima esposizione risale, come si è detto, al 1889: *Arithmetices principia nova methodo exposita,* Torino.

genere di trattazione già prospettato da H. Grassmann (19) e S. Peirce (20). Senza indagarli, si assumono dei concetti primitivi e si applica loro delle definizioni induttive e dei rapporti elementari posti come postulati. Questa teoria rispondeva all'esigenza dell'esattezza e della logicità, e su di essa si poteva costruire tutta l'aritmetica e quindi operare l'aritmetizzazione delle matematiche.

Ci limiteremo ad esporla per sommi capi:

Il Peano pone alla base dell'aritmetica tre idee fondamentali, dichiarate indefinibili nel sistema (21), ossia l'idea di zero, quella di numero e quella di successione, e inoltre cinque postulati che egli così enuncia:

1) Zero è un numero.

2) Il successore di ogni numero è un numero.

3) Non esistono due numeri con lo stesso successore.

4) Zero non è il successore di alcun numero.

5) Ogni proprietà di cui gode lo zero, e anche il successore di ogni numero che pure gode di quella proprietà, appartiene a tutti i numeri.

Quest'ultimo è il principio dell'induzione matematica.

Dicevamo che il sistema del Peano si è dimostrato incompleto. Il Peano stesso (22) ammette che un'infinità di sistemi soddisfano le cinque proposizioni primitive. Esse sono verificate quando, per esempio, si sostituiscono *numero e o* con *numero diverso* da o e *1*. Tutti i sistemi che soddisfano tali proposizioni hanno una corrispondenza biunivoca coi numeri. Il numero allora per il Peano è « ciò che si ottiene per astrazione da tutti questi sistemi, ossia il numero è il sistema che ha tutte le proprietà enunciate dalle proposizioni primitive, e solo quelle ». Tale definizione fu criticata. Il Russel (23) domanda come si distinguano tra loro i vari sistemi che concordano nel soddisfare le proposizioni primitive, per es. il sistema che comincia con 1 da quello che comincia con 0. E' possibile rispondere in due modi: 0 e 1, o almeno 0, sono, in quella ipotesi, idee primitive e quindi possono distinguersi intrinsecamente come il giallo e il blu. Così per le

(19) *Lehrbuch der Arithmetik*, Berlino, 1861.

(20) « American Journal », 1878.

(21) Cfr. *Notation de Logique mathématique*, Torino, 1894, p. 50.

(22) *Formulario*, 1899, p. 30; *Formulario*, 1913, in cui figura come prima la proposizione: « Il numero è una classe ».

(23) *I Principi della Matematica*, trad. it. di L. Geymonat, Milano, 1951, cap. XIV, n. 122.

altre due idee. Ma allora quelle tre nozioni sono delle costanti e quindi non vi è nessun bisogno di astrazione. o, numero e successione sono in conseguenza, in questo caso, idee che, come gli altri indefinibili, devono essere solo riconosciute. Il loro riconoscimento dà luogo a ciò che i matematici chiamano teorema di esistenza, che ha lo scopo appunto di assicurare che esistono realmente dei numeri. Tale teorema non viene dal Peano dimostrato. Rimarrebbe poi dubbio se quelle costanti sono *logiche,* e quindi l'aritmetica potrebbe essere un ramo della matematica applicata. L'altra risposta che si potrebbe dare consiste nel considerare o, numero e successore come *una* classe di terne tutte definite dalle cinque proposizioni primitive. La classe delle terne sarebbe definita dunque implicitamente dalle cinque proposizioni (24). Non vi sarebbe allora nessun indefinibile ma o, numero e successore diventerebbero variabili, perchè sarebbero una delle possibili terne. Bisognerebbe scoprire allora almeno una terna effettiva.

Trovatala, si richiede un metodo per fissare un valore costante a o, numero e successore. Una volta infatti che si sia trovato che una tale terna esiste, si può dimostrare che ne esistono infinite; infatti, togliendo il primo termine da qualunque classe che soddisfa le condizioni poste per i numeri, si ottiene ancora una classe che soddisfa a tali condizioni. Oltre a queste difficoltà il Russel dubita che sia possibile un processo di estrazione da tutti i sistemi che soddisfano i cinque postulati, quale è quello voluto dal Peano. Ognuno degli elementi del sistema che ne risulterebbe, soddisfa qualche proposizione che diventerebbe falsa quando si sostituisse ad esso un altro elemento del sistema. Nessun termine del sistema perciò ha solo le proprietà definienti il sistema e nessun altro.

La critica del Russel colpisce pure il più tardivo formalismo assiomatico di David Hilbert. Anche nella teoria di questo autore infatti ai numeri interi non viene assegnato nessun significato, ma solo alcuni assiomi che li dovrebbero definire solo implicitamente. Quei numeri tuttavia, non riuscendo così completamente definiti, rimangono delle variabili e costituiscono solo una successione. L'Hilbert non riesce su questa base, a dimostrarne l'esistenza ma solo la non-contraddittorietà. Da simile creazione non salta fuori la serie dei numeri naturali della vita quotidiana, dalle cui fondamentali esigenze essi erano effettivamente sorti.

La critica al Peano, soprattutto nella sua prima parte, è un caso particolare della critica che il Russel muove ad ogni definizione per astrazione (25). Tale definizione, secondo l'autore, sarebbe sempre affetta « da

(24) Vedi *Formulario,* 1903, p. 33.
(25) *I Principi...* cit., n. 110.

un difetto formale assolutamente letale: essa non dimostra che soltanto un unico oggetto soddisfi la definizione ». Le classi equipotenti (26), mentre dovrebbero avere la stessa proprietà comune, che si potrebbe quindi identificare con il numero dei loro elementi, ne avrebbero una classe. Ciò che si intende nel nostro caso per proprietà comune, spiega il Russel, è che ogni classe ha verso una certa entità, cioè il suo numero, una relazione che non ha verso nessun'altra entità, ma che tutte le classi equipotenti e non altre hanno verso il detto numero, relazione che si chiama molti-uno. Se ora ammettiamo la definizione per astrazione, « qualunque serie di entità, verso ognuna delle quali qualche classe abbia una certa relazione molti-uno, e verso una e una sola delle classi qualunque classe data abbia questa relazione, ed inoltre tale che tutte le classi equipotenti a una data classe abbiano la medesima relazione verso una e la stessa entità della serie, ci apparirà evidentemente come la serie dei numeri; ed ogni entità di questa serie sarà *il* numero di qualche classe ». Senonchè vi sono infinite serie di entità siffatte, sostiene il Russel, per cui la definizione manca allo scopo di definire *il* numero della classe. « Questa controversia, conclude l'autore, è assolutamente generale e dimostra che la definizione per astrazione non è mai un processo logicamente valido ».

Anche aggiungendo postulati a postulati non si riuscirà mai a superare queste difficoltà. Skolem ha dimostrato che « ogni enunciato valido nell'aritmetica dei numeri naturali, vale pure in sistemi affatto diversi da essa; è quindi assurdo voler scoprire qualche proprietà interna alla serie dei numeri che sia in grado di distinguerla da qualunque altra serie » (27).

In conclusione, rimanendo sul piano dell'aritmetica non si può trovare, neppure mediante l'enunciazione di quanti postulati si vogliono, una definizione esauriente di numero.

Si cercò di ottenere allora tale definizione sul piano della logica. Il Russel rispolverò la definizione del Frege. La chiarì, la spiegò, la espresse con parole sue e poi la difese. Ma essa è lontana dal soddisfare le esigenze, soprattutto filosofiche, della critica.

(26) Sono le classi che si possono porre in corrispondenza biunivoca, e sono dette anche *simili,* ossia le classi tali che ad ogni elemento dell'una ne corrisponda uno e uno solo dell'altra e viceversa. E' lo stesso concetto incontrato nell'esposizione del Dedekind.

(27) F. Waismann, *Introduzione al pensiero matematico,* Torino, 1939, pp. 147-48.

5. - La teoria del Frege e del Russel

Il punto di partenza nella teoria del Frege è la costatazione dell'impossibilità di costruire una valida scienza dei numeri pensandoli, come avviene nella teoria empiristica del Mill o in quella psicologistica, come qualcosa di empirico o di psicologico. Sono troppo evidenti le caratteristiche di universalità e di necessità insite nelle proposizioni aritmetiche per potersi orientare, nella ricerca di un fondamento da dare alla scienza dei numeri, alle cose nella loro esteriorità. Il numero, sulle cui proprietà tale scienza va costruita, non può essere una proprietà degli oggetti in se stessi, ma una proprietà del concetto dell'insieme di quegli oggetti. Il nostro modo di esprimerci lo suggerisce. Quando diciamo che Venere ha zero satelliti non ci riferiamo ai reali satelliti che non esistono, ma al relativo concetto. « La carrozza dell'imperatore è tirata da 4 cavalli ». Il numero 4 è aggiunto al concetto « cavallo che tira la carrozza dell'imperatore » (28). Per questo motivo il numero posso estenderlo a cose materiali e anche a cose immateriali, agli eventi e alle leggi di Keplero. Non riguarda infatti gli esteriori contenuti eterogenei, ma i concetti sotto cui sono compresi. Non si deve da ciò inferire che le espressioni numeriche esprimano qualcosa di soggettivo. Se i concetti fossero qualcosa di soggettivo, sarebbe soggettiva anche la relazione di subordinazione dell'uno altro, come soggettiva è la relazione tra rappresentazioni. A prima vista sembra effettivamente che la proposizione: « tutte le balene sono mammiferi » non tratti di concetti ma di animali. Ci si provi allora a mostrare uno di quegli animali a cui la proposizione si riferirebbe. Non ci si deve peritare a indicare una balena eventualmente presente. Dalla nostra proposizione infatti non segue che essa è un mammifero, se non con la premessa aggiuntiva che quell'animale è una balena, nozione che non è contenuta nel nostro enunciato. La parola « balena » non nomina nessuna cosa singolare. Se si dicesse che in essa vi è espresso un « oggetto indeterminato », si potrebbe rispondere che appunto « oggetto indeterminato » è una cattiva espressione per dire « concetto » (29).

I numeri riguardano dunque i concetti e le loro relazioni sono relazioni concettuali oggettive. Questi concetti sia pure diversi assumono la stessa determinazione di numero quando vengono riscontrati in una relazione tale per cui gli elementi a cui si riferiscono sono tra di loro in corrispondenza biunivoca. Si arriva così al concetto di « *ugualmente nume-*

(28) *Grundlagen*... cit., p. 59.
(29) *Ibid.*, p. 60.

roso » (*gleichzahlig*): « Stabiliremo di dire che il concetto F è ugualmente numeroso al concetto G, quando esiste la possibilità di porre in corrispondenza biunivoca gli elementi che cadono sotto l'uno con quelli che cadono sotto l'altro concetto ». E finalmente alla definizione di numero: « Il numero che spetta al concetto F è l'estensione del concetto *ugualmente numeroso a F* » (30).

Il Russel dà alla definizione del Frege quest'altra forma (31): « Il numero *cardinale di una classe* α, che denoteremo con Nc' α, è definito come *la classe di tutte le classi equipotenti ad* α » (32).

La definizione così proposta (ci fisseremo sulla formulazione del Russel), presta il fianco a gravi critiche. Innanzitutto, che cosa intende di preciso il Russel per « classe » nel contesto della sua definizione? Non si può intendere « classe » nel suo puro senso estensionale, ossia come collezione, agglomerato, mucchio dei suoi elementi. Come infatti potrebbe esistere una classe come la classe-nulla, che non ha nessun membro e che non è quindi nessun mucchio? Le acrobazie escogitate per evitare la difficoltà e le imbastiture proposte per chiudere lo strappo, più che raggiungere il loro scopo non fanno che manifestare ancor più la debolezza della tesi (33). La classe di un solo membro poi non si vede come non si dovrebbe identificare con quel membro stesso. Inoltre la collezione muta se viene meno un membro o un altro se ne aggiunge.

Non si possono considerare le classi neppure come individui. Oltre alle contraddizioni cui darebbero luogo e che il Russel stesso espone (34), si può dimostrare che il numero delle classi è maggiore del numero degli individui.

Per « classe » come figura nella definizione, non si può nemmeno intendere il concetto-classe, ossia, nella terminologia del Russel, una proprietà mediante cui si definisce una collezione. Si cade infatti allora in definitiva nella definizione per astrazione, criticata dallo stesso Russel. « Se definissimo il predicato mediante la collezione di oggetti, egli dice, non otterremmo, in generale, un predicato singolo, ma una classe di pre-

(30) « Ich definire demnach: die Anzahl, welche dem Begriffe F zukommt, ist der Umfang des Begriffes *gleichzahlig dem Begriffe* F », *Ibid.*, pp. 79-80.

(31) Sulla differenza tra le due formulazioni, cfr. Russel, *Principi*... cit., n. 494.

(32) « *The Cardinal Number of a class* α, which we will denote by Nc' α, is defined as *the class of all classes similar to* α » *Principia Mathematica*, vol. II, Cambridge, 1957, p. 4; cfr. *Principia*... cit., n. 111, p. 228; *Introduzione alla filosofia matematica*, trad. di Luca Pavolini, Milano, Longanesi, 1947, p. 30.

(33) *Principi*... cit., n. 73; n. 491.

(34) *Introduzione*... cit., cap. XIII.

dicati; per questa classe di predicati avremo bisogno di un nuovo oggetto-classe e così via ». Si potrebbe pensare che il concetto più conveniente per definire il numero della classe *u*, sia il concetto 'equipotente ad *u*'. Ma ci si si sbaglierebbe. Infatti se *v* fosse equipotente a *u*, il concetto 'equipotente a *v*' definirebbe la stessa classe, pur essendo un concetto differente.

Il Russel ha dovuto finire per considerare la « classe » che figura nella sua definizione come una « finzione logica ». Così « non sarà più necessario supporre che le classi esistano, senza d'altra parte essere costretti a formulare la supposizione opposta, cioè che le classi non esistano. Asteniamoci semplicemente da entrambe le supposizioni » (35). Ci sembra tuttavia che il non poter assegnare al termine centrale della definizione ogni significato ordinario, e doversi rifugiare a considerarlo come « una finzione logica » non costituisca un superamento delle difficoltà, ma all'opposto rappresenti un'obiezione alla validità della definizione stessa.

Altre difficoltà sussistono per la tesi che stiamo studiando. Il Cassirer osserva che vi è una netta differenza tra il pensiero di equivalenza o equipotenza e quello di numero (36), e non si può pertanto ridurre l'uno all'altro. E infatti quando si sia trovato che gli elementi delle classi dei terzetti, per esempio, si possono porre in corrispondenza biunivoca tra di loro, non si è arrivati ancora per questo al concetto del numero tre. La stessa cosa vale per tutte le classi tra loro equipotenti. Parlare poi di corrispondenza biunivoca tra gli elementi della classe zero, non ha davvero nessun senso, non ostante gli sforzi prodigati per applicare anche in questo caso il concetto di equipotenza (37).

La corrispondenza biunivoca inoltre consiste nel far corrispondere a un elemento della prima classe, uno e uno solo della seconda. Non è presupposta la nozione del numero *uno* a questa corrispondenza che dovrebbe servire a definire i numeri compreso l'uno? Il Russel distingue tra la nozione di individuo, che sarebbe fondamentale, e che sola sarebbe richiesta, e la nozione di *uno*, da essa derivata. Egli tenta poi di enunciare in questo altro modo la corrispondenza biunivoca: « R è una relazione uno-uno se, quando x e x' hanno la relazione R verso y e y' e x e x' sono identici, e così sono identici y e y' » (38). Ma anche in questo caso, quando rapporto x e x' a y e y', in ordine alla numerazione, non è necessario assu-

(35) *Introduzione*... cit., p. 204.
(36) *Substanzbegriff*... cit., pp. 63-64.
(37) Cfr. per esempio: FREGE, *Grundlagen*... cit., 77, p. 90.
(38) *I Principi*... cit., p. 253.

mere ognuno di questi x e x', y e y' sempre come *uno* in senso formale e non già come individuo? Se lo prendessi *solo* come individuo, cosa certamente possibile, tutto sarebbe indifferente *agli effetti del numero da determinare*.

6. - Momento formale e momento filosofico nella definizione del numero

In base all'esposizione e alla critica svolta, possiamo ora fissare meglio la situazione in uno sguardo d'insieme.

La nozione di numero quale figura nelle esposizioni degli empiristi e dei psicologisti si è dimostrata inadatta a soddisfare le esigenze di una valida fondazione dell'aritmetica. Essa non è in grado di spiegare le proprietà fondamentali inerenti alle proposizioni matematiche.

Più consistenti si sono dimostrati gli altri tre tipi di definizione incontrati, che chiameremo, per motivi che esporremo, rispettivamente definizione assiomatica, definizione realistica e definizione nominalistica.

La teoria assiomatica non definisce espressamente il concetto di numero, ma ritiene che possa venir determinato implicitamente, mediante le proposizioni primitive, o assiomi, che stabilisce in partenza. La critica ha mostrato che il concetto di numero rimane per questa via in se stesso vago, e in conseguenza una pluralità di sistemi disparati può verificare un numero qualunque di assiomi prefissati.

La definizione realistica e quella nominalistica sono invece definizioni esplicite, ma esse naturalmente, derivando da presupposti diversi tra loro, risultano altrettanto diverse. Il punto di vista realistico, seguito oltre che dal Dedekind, anche da altri matematici insigni, come il Cantor, procede per via deduttiva. Si parte dai concetti più generali e mediante progressive determinazioni si arriva a concetti sempre più particolari. Gli individui come tali non sono considerati, anzi si deve astrarre positivamente dalle loro particolarità, le quali pertanto rimangono al di fuori delle relazioni necessarie e universali che intervengono tra i concetti. Gli individui tuttavia, che rappresentano l'estensione di quei concetti, rimangono intrinsecamente legati da quelle relazioni, perchè a quei concetti corrisponde in essi qualcosa che li costituisce o che in ogni caso non resta a loro esteriore.

Tutt'altra ispirazione e linea di pensiero è seguita dai nominalisti. La teoria nominalistica concorda con quella empiristica in un punto essenziale, ossia nella supposizione che si debba partire e che si debba anche in definitiva rimanere, nella definizione di numero come in ogni altra

definizione, agli individui quali si esperimentano in natura. Ogni concetto, quale è elaborato dalla mente, sia pure in diretta o indiretta relazione agli individui sperimentabili, assume per queste teorie, contorni così sfumati e valore così dubbio, da essere considerato come qualcosa di irreale: « Flatus vocis » dicevano gli antichi nominalisti, « finzione logica » dice il contemporaneo Russel.

Sotto un certo punto di vista, la posizione di quest'ultimo filosofo è più imbarazzante di quella dello Stuart Mill. Costui, come abbiamo visto, rimane veramente, nella sua concezione di numero, agli oggetti come sono in « rerum natura ». Ne nascono naturalmente gravi difficoltà di ordine matematico. La sua aritmetica non può reggersi in piedi. Egli non potrebbe spiegare, se volesse tentarlo, i numeri transfiniti, nè le leggi fondamentali del calcolo. Ma dal punto di vista filosofico rimane coerente a se stesso. Bertrand Russel invece ubbidisce all'esigenza razionalistica che presiede alle leggi dell'aritmetica, accoglie la definizione del Frege, quale nasce dalla critica alla teoria empiristica, e su questa base può dare un assetto imponente alle leggi fondamentali della matematica. Ma nel concetto fondamentale egli, che vuole rimanere un empirista, rimane compromesso, ed il suo numero, questa « finzione », come egli la chiama, rimane sul terreno filosofico un mistero e, possiamo anche dire, un paradosso.

A parte queste considerazioni di carattere generale, gli ultimi due procedimenti, che abbiamo particolarmente studiati, hanno rivelato alla luce della critica un'incompletezza, che è responsabile in parte anche delle difficoltà e delle oscurità che derivano allo stesso sviluppo formale. Nelle determinazioni che il Dedekind pone per arrivare al suo concetto di numero naturale si è visto che manca l'espressione di quella sintesi degli elementi della classe, sia pure « liberati » da ogni contenuto, a cui corrisponde nella classe stessa la *sua* particolare molteplicità. Quella rappresenta un momento essenziale del concetto di numero e questa, per conseguenza, il vero soggetto delle relazioni aritmetiche.

La definizione realistica di numero cardinale data dal Cantor è ancora più generica: « Chiamiamo *potenza* (*Maechtigkeit*) o *numero cardinale* della classe M il concetto generale che, mediante la nostra attiva capacità di pensiero (mit Hülfe unseres activen Denkvermögens), risulta in modo tale dalla classe M, che si astragga dalla natura dei suoi diversi elementi m e dall'ordine in cui sono posti » (39). Se nella definizione del

(39) *Beitrage zur Begrundung der transfiniten Mengenlehre I*, « Math. Ann. », 46 (1895), p. 401.

Dedekind mancava ciò che veniva ordinato, ossia la molteplicità degli elementi dell'insieme, o l'insieme dei posti che definiscono colla loro progressione il posto che s'identifica col numero cordinale, nella definizione del Cantor manca la successione delle molteplicità, perchè, come è detto nella stessa definizione, « si astrae dall'ordine in cui gli elementi sono dati ». E' chiaro tuttavia che per arrivare a formare o a rendersi conto di questa molteplicità che s'indentifica con questo numero cardinale, devo mentalmente prendere e separare con un certo ordine i vari elementi della classe. Che se si volesse obiettare che questa necessaria attività di « ordinare » per arrivare al numero cardinale rimane al di fuori del concetto a cui si arriva alla fine, si deve però ritenere che anche nel suo concetto questa *molteplicità* che corrisponde a *questo* numero è determinata solo in quanto si riferisce alle altre molteplicità colle quali forma una progressione. Per fare un esempio, la molteplicità che indico col segno 3 è tale, perchè è immediatamente più grande di quella indicata col segno 2. Senza questi riferimenti non avrei nessun numero cardinale *determinato*.

La stessa incompletezza si è riscontrata nella definizione nominalistica del Russel. In essa non si parla, come nelle definizioni realistiche, di cose svuotate di ogni loro particolare contenuto, e concepite solo come diverse, ma di « classi » senz'altro. Guai però a tentare di determinare che cosa s'intende, in quella definizione, per « classe ». Ogni determinazione di significato di tale parola porta a insormontabili difficoltà. La ragione è ovvia. Non è infatti delle classi che si parla direttamente nelle proposizioni aritmetiche, ma delle *loro molteplicità*. Naturalmente, e questo abbiamo voluto sottolineare, non si tratta in quelle proposizioni della molteplicità in genere, compito in caso di una filosofia generale, ma delle molteplicità particolari inerenti alle classi, ossia delle molteplicità determinate o, in altre parole, delle quantità di molteplicità possedute dalle classi reali o possibili.

Questi due elementi si trovano effettivamente nelle definizioni dei matematici, e più ancora dei filosofi, che non hanno voluto accontentarsi, o per lo meno che non erano soltanto preoccupati, di dare una sistemazione formale alla scienza dei numeri, ma desideravano anzitutto indagare *che cosa è il numero, qual'è il significato di numero*. Questo momento squisitamente filosofico pare che vada trattato a parte e che non entri direttamente nella struttura formale dell'aritmetica ma ne costituisca soltanto un presupposto. Presupposto tuttavia necessario, che non va dunque volatilizzato in sacrificio allo schematismo formale, ma che all'opposto va indagato in se stesso per consentire una fondazione valida alla scienza esatta e una soddisfacente comprensione del suo significato.

I due elementi sono presenti, dicevamo, nelle definizioni dei mate-

matici e dei filosofi. Talvolta è sottolineato l'uno di essi, soprattutto la molteplicità, talvolta l'altro (40) ma non mancano definizioni in cui ambedue sono, più o meno chiaramente, affermati: Per Eudosso di Cnido (408-355): « Numero è una pluralità definita » (41). Evidentemente colla parola « definita » egli intendeva dire che nel numero la pluralità è determinata, e quindi che il numero è la determinazione della pluralità, ossia la specifica quantità di pluralità contenuta nell'insieme.

Aristotele (384-322) nella *Metafisica* espone la sua teoria in evidente contrasto con quella di Platone. Per lui « L'essenza dell'uno è quella di essere principio del numero » (V. 6, 13). « I numeri si ottengono con successive aggiunte dell'unità (XIII. 7, 8-10). « Il numero, in quanto numero, si distingue quantitativamente » (XIII. 8, 1). E' dunque, in definitiva, una serie di molteplicità che si distinguono quantitativamente.

Moderato (neoplatonico dei tempi di Nerone): « Numero è una progressione della pluralità, che comincia dall'unità e, regredendo, finisce all'unità ». Sebbene qui sia definita la serie dei numeri più che il numero in se stesso, vi si vede affermato con chiarezza sia l'aspetto di progressione che quello di pluralità contenuto nel concetto di numero.

(40) Ecco alcune di queste definizioni:

Secondo Giamblico, Talete di Mileto (600 a. C.) avrebbe appreso dagli Egiziani il concetto di numero come « sistema di unità » (*Jambl., In Nicom. Ar. Introd.*, 10, 8-10). Euclide (seconda metà del V sec. a. C.), *Elementi* VII, termine 2: « Unità è ciò per cui ogni singola cosa è detta uno. Numero è la pluralità composta di unità ».

Michele Psello (scrittore bizantino del sec. XI), in dipendenza da Teone e altri neoplatonici, scriveva: « Omnium numerorum principium est unitas, innumerus fons numerorum. Est enim numerus multitudo ex unitatibus constituta » (nel *Compendio del Quadrivio*).

Boezio (480-525 circa): « Numerus est unitatum collectio, vel quantitatis acervus ex unitatibus profusus » (*Institutio Arith.*, ed. Friedlein, Lipsia, 1867, p. 13). L'arabo Muhammad ibn Musà, detto al-Khuwariznu: « omnem numerum ab uno compositum esse inveni » (Trad. di GHERARDO CREMONESE, in G. Libri, *Histoire des Sc. Math.*, nota XII al vol. I, p. 253).

N. Tartaglia (c. 1499-1557): « Il numero è " una moltitudine composta de unitate mathematice, cioè astratte da ogni materia sensibile » (*General trattato di Numeri e Misure*, Venezia, 1556, carte 1 e 2).

G. W. Leibniz (1646-1716): « Abstractum autem ab uno est *unitas*, ipsumque totum abstractum ex unitatibus seu totalitas dicitur *Numerus* » (*Dissertatio de arte combinatoria*, Lipsiae, 1666, in *Leibnizens math. Schriften*, ed. C. I. Gerhardt, 2 Abth., I, Halle, 1858, p. 1).

A. G. Kastner: « Numero intero è una moltitudine di cose della stessa specie » (*Anfangsgrunde der Arithmetik*, 1758, p. 21).

(41) JAMBL., *op. cit.*, 10, 17.

Leonardo Pisano (inizi del sec. XIII): Il numero è « unitatum perfusa collectio, sive congregatio unitatum, quae suos in infinitum ascendit gradus » (42). Anche qui la molteplicità si determina nella successione.

In S. Tommaso d'Aquino (1226-1257) troviamo che il numero si ottiene con aggiunte dell'unità e che consiste in una « species quantitatis » (43).

Qualora si tenga fisso questo concetto di numero naturale come quantità (o grado) di molteplicità di un insieme (o classe), ci si rende subito conto delle proprietà anche formali di detto numero e delle controversie ad esso relative. Ne considereremo due di particolare importanza, la distinzione tra numero concreto ed astratto e la distinzione tra numero ordinale e cardinale.

7. - Numero concreto e astratto, ordinale e cardinale

Per arrivare al concetto di numero è necessario aver costatato che esiste una molteplicità di cose e in più che di queste molteplicità ne esistono parecchie. Solo allora si può stabilire una molteplicità di segni in corrispondenza a queste varie molteplicità. In questo loro riferimento immediato alle molteplicità degli insiemi di cose, i numeri naturali si possono chiamare concreti. La teoria empiristica ha un suo valore in quanto accentua questo primordiale riferimento all'esperienza. « Tutti i numeri devono essere i numeri di qualche cosa, asserisce esagerando il Mill, non vi sono numeri astratti, dieci deve significare dieci corpi o dieci suoni o dieci battiti del polso ». In realtà « dieci » non va riferito ai corpi in quanto tali o ai battiti in quanto tali, altrimenti come potrebbero essere dieci sia i corpi che i battiti? Si può sempre determinare il numero degli elementi di un insieme, anche se questi elementi non sono conosciuti. E' la molteplicità che è la stessa. Ma questa molteplicità d'altra parte non può essere che la molteplicità reale, quella dei corpi, dei battiti, di questi elementi sconosciuti, perchè nel *concetto* dell'insieme non vi è molteplicità. La molteplicità è nella realtà (prescindendo dalla questione se si tratti di una realtà assoluta o soltanto relativa all'uomo). Oltre a questa confusione, la teoria del Mill dimostra una grave deficienza quando nega che vi siano numeri astratti. I numeri concreti infatti, che danno il grado di

(42) *Liber abaci*, p. 2.
(43) *Summa theol.* I, q. 30, a. 3.

molteplicità degli insiemi, sono poi i soggetti delle relazioni che esprimono la loro natura. Non sono più in questo caso il *risultato* della determinazione del grado delle varie molteplicità, ma il punto di partenza delle relazioni implicite nella loro definizione. Sotto questo aspetto, si possono chiamare numeri astratti. La distinzione non è dovuta ai moderni. E' già presente nei pitagorici, e in Platone si afferma anche di più. I numeri astratti anzi minacciano di diventare, per questo filosofo, dei numeri in sè, numeri ideali, sostanze separate. Platone nella *Repubblica* consiglia di insegnare la scienza dei numeri ai futuri reggitori dello stato, « ma non alla maniera volgare, occupandosene a scopo di compra e di vendita, come mercanti e rivenditori, ma in modo che la loro intelligenza possa contemplare la natura dei numeri » ed essi così staccandosi dal mondo delle cose che periscono, possano accostarsi a quello della verità e dell'essenza. Simile insegnamento infatti, « innalza l'anima, e la obbliga a ragionare intorno ai numeri considerati in sè, rifiutando di ragionare se qualcuno ricorra a numeri associati a corpi visibili o tangibili » (44). L'Aquinate pone la distinzione con chiarezza: « Il numero è duplice; ossia il numero semplice o assoluto, come due, tre, quattro; e il numero come è nelle cose numerate, come due uomini e due cavalli » (45). Ed il Tartaglia pure con molta chiarezza: « Bisogna avertire che sopra al numero vi son quelle medesime due considerationi, dette sopra delle unità, cioè una secondo il Naturale e l'altra secondo il Mathematico. Il Naturale considera il detto numero sì secondo la ragione come secondo l'essere, congionto con quelle materie sensibilmente numerate...; ma il Mathematico poi considera il detto numero sì come una moltitudine composta de unitate mathematice, cioè astratte da ogni materia sensibile » (46).

E' su questo piano di astrattezza che nasce l'esigenza di ampliare il campo dei numeri e di determinare i numeri relativi, frazionari, irrazionali, immaginari, transfiniti. Questi numeri non riguardano più direttamente le quantità discrete relative alle molteplicità delle cose, come i numeri naturali, ma le esigenze di ampliamento delle operazioni aritmetiche sorte sulla loro base, la *possibilità* di ripetizione indefinita della legge che presiede alla determinazione dei numeri naturali, e infine la possibilità, nella misurazione delle grandezze continue, di una divisione indefinita della grandezza che si sceglie come unità di misura. Sembra pertanto esagerato il punto di vista dei matematici finitisti e intuizionisti della scuola di Brouwer e Weyl, e non necessaria la riduzione del campo

(44) *Repubblica*, 525 c.
(45) *Summa theol.* I, q. 30, a. 3 ad 4.
(46) *General trattato...*, *op. cit.*, carte 1 e 2.

dei numeri, e quindi della matematica, che discenderebbe dalle loro premesse. Sul piano dei numeri astratti non vi è limite alla creatività della mente umana, purchè questa si fondi, almeno indirettamente, sulle reali esigenze che nascono dall'aritmetica dei numeri reali, dalla natura delle leggi che presiedono alla loro formazione, e dalla struttura della quantità reale non solo discreta ma anche continua.

Poichè per ottenere una determinazione del grado di molteplicità degli insiemi, occorre che sul piano riflesso si stabilisca una legge di formazione del sistema di segni e di nomi corrispondenti a quei gradi (46 *bis*), è naturale che si siano ritenuti i numeri come creazioni della mente umana. « I numeri sono libere creazioni dello spirito umano, essi servono come mezzo per distinguere più facilmente e più nettamente le cose » (47). Una volta tuttavia che si sia costruita la scienza dei numeri esplicitando le leggi implicite nella loro positiva determinazione, sarebbe errore misconoscere in loro stessi l'esigenza a cui quella loro positiva determinazione ha dovuto obbedire, e ancor più quel riferimento alla realtà rappresentato dalla diversità delle molteplicità attorno a cui, come attorno ad un nucleo, si sono a mano a mano realizzati ampliandosi.

Da quanto si è venuti dicendo risulta una costatazione che può sembrare a prima vista sorprendente. I numeri, sia concreti che astratti, sono determinazioni, oltre e più che astrazioni. Abbiamo trovato già in Dedekind un cenno di questa verità. Le diversità di molteplicità reali o possibili devono essere determinate con un simbolo o con un nome perchè diventino numeri. Devono essere in altre parole presenti alla mente che in sè le determina per essere numeri. Per questo motivo, come è già stato osservato (48), non si deve pensare di ottenerli, mediante l'astrazione, allo stesso modo che si ottiene il concetto di colore o di durezza delle cose. E' questo l'aspetto singolare dei numeri, misconosciuto quando si definisce il numero come ciò che è comune a classi equipotenti. Il concetto di equipotenza gioca effettivamente un ruolo fondamentale nella deduzione delle proprietà e delle leggi dell'aritmetica, ma esso non precede il concetto di numero, ma ne deriva. Si deve dire che a due classi che hanno lo

(46 bis) Questa esigenza è stata esagerata dal Tomae il quale sostiene che per la formazione del numero sia richiesto solo che si diano nomi diversi ai diversi insiemi di oggetti (*Elementare theorie der analitischen Functionen*, p. 1, cit. dal Frege, p. 38) e da D. Hilbert, il quale, seguendo in questo punto l'Heine, identifica il numero col segno del numero, cadendo così in una forma più raffinata ma altrettanto grave di empirismo.

(47) *Was sind*... cit., trad. it., p. 10.

(48) Cfr. Frege, *op. cit.*, p. 58; Cassirer, *op. cit.*, p. 50.

stesso grado di molteplicità va riferito lo stesso numero e non già che lo stesso grado di molteplicità *costituisce* lo stesso numero. Il numero infatti è determinato in se stesso dalla *successione dei vari gradi* di molteplicità. Il 3 è tale perchè viene immediatamente dopo il 2, e così via. Quando si è potuto astrarre da classi equipotenti il numero 37485? E inoltre, come si potrebbe, nella teoria dell'equipotenza, definire il numero zero, dal momento che non si possono mettere in corrispondenza gli elementi delle rispettive classi che sono senza elementi? E come si potrebbe, dopo aver messo in corrispondenza biunivoca successivamente due o più classi, concludere al numero loro corrispondente se, oltre ad aver constatato quella corrispondenza, non si *contassero* nello stesso tempo le volte in cui tale corrispondenza è stata applicata? Ma *contare* significa già supporre il numero. Queste difficoltà che abbiamo visto insorgere con particolare evidenza trattando della teoria del Russel, non sono esclusive ad essa. Ebbene, queste difficoltà scompaiono quando si segua il retto ordine di deduzione. Se il numero, come quantità di molteplicità, precede, quale costitutivo fondamentale, i singoli numeri che ne sono le determinazioni aritmetiche, si potrà determinare, anzi sarà opportuno determinare, con un nome (zero) e con un simbolo (0) la mancanza totale di molteplicità, e con un altro nome (uno) e un altro simbolo (1) il principio della molteplicità. Non è la molteplicità infatti il numero, ma la quantità di molteplicità. E inoltre si diranno equipotenti due classi che hanno la stessa molteplicità. Se vorrò verificare che sono equipotenti, lo potrò fare ora senza inconvenienti logici *contando,* perchè il numero era stato previamente determinato.

La controversia sulla priorità degli ordinali sui cardinali o viceversa, è ancor più sottile. Il Dedekind, come si è visto, sostiene la prima tesi. I cardinali deriverebbero dagli ordinali in un secondo sviluppo. Dopo di lui altri matematici, come Helmoltz e Kronecker, hanno sviluppato questi passaggi. Si può infatti coordinare a ogni posto nell'ordine della successione un elemento della classe fino che si arriva a disporre l'ultimo elemento. La conclusione del procedimento univoco seguito abbraccia tutte le fasi precedenti e ridà tutta l'operazione di coordinamento. Quel numero n che corrisponde all'ultimo posto, dà quindi ora anche un'indicazione della totalità del sistema, ossia il numero cardinale. « Questo numero n si dice *numero di elementi* contenuti nel sistema (o anche il grado del sistema), e si dice che il sistema consta di n elementi, ovvero che il numero n indica di *quanti* elementi consta il sistema » (49). Ma già in quella

(49) *Dedekind, Was sind...* cit., n. 161.

progressione, se, come si è visto, doveva essere una progressione di *numeri,* sia pure ordinali, e se si doveva come tale concepire, non si poteva determinare i singoli posti senza tener presenti in ognuno di essi tutti i posti dei numeri che precedevano nell'applicazione della corrispondenza che li andava producendo. In altre parole, il numero cardinale doveva essere implicito in qualche modo nella progressione che definiva il numero ordinale. D'altra parte è chiaro che più classi non possono rivelarsi come equipotenti, e quindi definire il numero cardinale a loro relativo, per esempio nel sistema del Russel, se nel correlare ad ogni termine di una classe un termine dell'altra, non costituisco una *progressione* di correlazioni, anche se poi alla fine astraggo da esse. Non solo, ma anche quando sono arrivato alla fine della correlazione e ho astratto dall'ordine del procedimento svolto, perchè il risultato abbia un significato *determinato,* occorre che questo numero sia visto in relazione di « più grande o più piccolo » e quindi nella progressione di ordine. In definitiva, come asserisce il Russel, « tanto gli ordinali quanto i cardinali formano una progressione, ed hanno esattamente le stesse proprietà ordinali. Tutta l'aritmetica può venir provata tanto per gli ordinali quanto per i cardinali separatamente senza alcun richiamo degli uni agli altri, risultando le proposizioni simbolicamente identiche, ma differenti nel significato » (50). L'espressione « separatamente senza alcun richiamo degli uni agli altri, non sembra del tutto esatta. L'un aspetto può essere solo implicito nello sviluppo dell'altro, ma non vi può mai mancare, come è risultato dalla critica svolta.

In realtà il numero, come quantità (o grado) di molteplicità di un insieme, contiene in se stesso i due punti di vista (51). Può essere infatti considerato come grado di molteplicità di un dato insieme, o come molteplicità corrispondente a quel dato grado. Il primo è il punto di vista ordinale, il secondo è il punto di vista cardinale. Non si può però in concreto prescindere completamente nè dall'uno nè dall'altro 2). Se si prescinde dalle molteplicità si ha una successione senza termini e in se stessa indistinta ossia formata di passi a uno a uno separati; la successione non

(50) *I Principi...* cit., n. 230.

(51) La psicologia sperimentale si pronuncia chiaramente a questo proposito. Cfr. J. Piaget - A. Szeminska, *La génèse du nombre chez l'enfant,* Neuchâtel, 1941. Ecco come G. Petter (*Lo sviluppo mentale nelle ricerche di Jean Piaget,* trad. it., Firenze, 1960) riassume i risultati dei due autori: « Ogni operazione di cardinazione non va mai disgiunta da una correlativa operazione di ordinazione. Anche nel caso di un insieme di oggetti tra loro identici, perchè ciascuno di essi non venga utilizzato due volte, occorre che i singoli elementi vengano in qualche modo ordinati, così che diventi possibile distinguere ciascun termine dai precedenti » (p. 290).

è più allora numerica. Se si prescinde dal grado o quantità di molteplicità, non si ha più una successione e la molteplicità non può organizzarsi secondo le leggi dell'aritmetica. In questo senso è vero quanto dicono sia il Frege che il Russel, ossia che il numero non va identificato colla molteplicità (52). In questo caso, tra l'altro, non si potrebbero più chiamare numeri lo zero e l'uno.

8. - Aritmetica e logica

Abbiamo già considerato come il Russel, in seguito alle difficoltà che insorgono quando si vuol determinare il significato delle sue « classi di classi equipotenti » in cui consisterebbe, secondo lui, il numero cardinale, abbia pensato di riguardarle come « finzioni logiche » (53). Nella sua « Introduzione alla filosofia matematica » egli scrive giudizi molto gravi contro la sua stessa definizione. « Naturalmente la classe delle coppie (per fare un esempio) è qualcosa di diverso dal numero due. Però, mentre non abbiamo abbiamo dubbi intorno alla classe delle coppie, che è un'entità precisa e non difficile da definire, il numero 2 è un'entità metafisica di cui non saremo mai sicuri se esiste realmente e se l'abbiamo individuata. Quindi è più prudente accontentarci della classe delle coppie, di cui siamo sicuri, anzichè inseguire un problematico numero 2 che resterà sempre nel vago. Di conseguenza scriviamo la seguente definizione: *Il numero di una classe è la classe di tutte le classi simili ad essa.* Così il numero d'una coppia sarà la classe di tutte le coppie. Infatti, secondo la nostra definizione, la classe di tutte le coppie *è* il numero 2 ». E conclude: « A spese d'una piccola bizzaria d'espressione, questa definizione è certamente definitiva e inattaccabile ». Le stesse concessioni preliminari fatte dall'autore sembrano indicare qualcosa di più grave di una semplice « piccola bizzaria d'espressione ». Se si riconosce che il numero 2 *non* è la classe di tutte le coppie, ponendo invece che *lo sia,* c'è da aspettarsi che ne vengano degli inconvenienti e che non tutto sia coerente e logico nella successiva deduzione, soprattutto per chi, come il Russel, esige che i numeri si applichino alla vita quotidiana e corrispondano alle nozioni ordinarie che se ne hanno (54).

(52) FREGE, *Grundlagen*... cit., p. 58; RUSSEL, *Introduzione*... cit., p. 22.
(53) Pp. 29-30.
(54) *Ibid.*, p. 20.

Noi abbiamo già segnalato nelle pagine precedenti alcuni degli inconvenienti che ne derivano, come l'impossibilità di definire adeguatamente il numero zero e il numero uno. Ma un'altra conseguenza più grave, dal punto di vista filosofico, ci sembra che ne discenda, ossia la tesi « fondamentale », come il Russel la chiama (55), dell'identità tra matematica e logica. Egli dichiara che la sua definizione si raccomanda per il fatto che le proprietà formali che si considerano appartenere ai numeri cardinali risultano da essa, e inoltre per la ragione che « fino a che non adottiamo questa definizione o qualche altra più complicata e praticamente equivalente, è necessario riguardare i numeri cardinali di una classe come un indefinibile. Pertanto la definizione data evita un'indefinibile inutile assieme alle proposizioni primitive che lo accompagnano » (56). Senonchè, purtroppo, la sua definizione di numero cardinale non si è dimostrata adeguata al concetto che ne abbiamo mentre da questo concetto seguono le proprietà formali, comprese quelle esposte dal Russel, dalle quali si sviluppa l'aritmetica. La conseguenza è che all'inizio della scienza dei numeri va posto o presupposto un contenuto che precede l'aritmetica e che non può ridursi alle leggi della logica. Il Russel sfida coloro che non condividono la sua opinione dell'identità tra matematica e logica a trovare un punto in cui la matematica non sia logica. Sembra che la risposta possa essere la seguente: L'aritmetica si sviluppa in relazioni logiche, applicate però ad un contenuto che non appartiene alla logica, e pertanto non sembra legittimo ridurla semplicemente a logica. Il contenuto è il concetto stesso di numero naturale, quale deve figurare in una definizione adeguata. Poichè la determinazione effettiva delle possibili varie molteplicità mediante l'unica regola di formazione dei numeri è introdotta *una volta per sempre* all'inizio, e nessun altro contenuto è più richiesto per lo sviluppo della matematica, si è supposto, esagerando, che nella matematica non vi fosse nessun contenuto, ma solo intreccio di regole logiche. Da questo primordiale contenuto infatti discende immediatamente, come si è accennato, la proprietà fondamentale che classi aventi lo stesso numero di oggetti sono equipotenti e quindi lo sviluppo delle altre deduzioni.

Considerato da questo punto di vista, anche il sistema del Russel, presupponendo in effetti la nozione di numero, va riguardata, come quel-

(55) *I Principi*... cit., introduz. alla 2ª ed., p. 5.

(56) *Principia mathematica* cit., vol. II, p. 30.

lo del Peano, come un sistema assiomatico, sia pure più semplice e raffinato.

La stessa tesi dell'identità tra matematica e logica era stata sostenuta, oltre che dal Frege, anche dal Dedekind (57). « Nel concepire l'aritmetica (algebra, analisi), egli dice, soltanto come parte della logica io intendo già di considerare il concetto di numero come del tutto indipendente dalle rappresentazioni o idee dello spazio e del tempo e di riconoscere piuttosto in questo concetto una emanazione diretta delle pure leggi del pensiero » (58). Si può ammettere che il concetto generico di numero, riferendoci col termine « generico » a quanto è stato detto nei numeri precedenti, preceda « le rappresentazioni o idee dello spazio e del tempo », si può anche ammettere che nel concetto dei singoli numeri stessi, rappresentanti la determinazione di quel concetto generico, non entrino per nulla le intuizioni spaziali e temporali, che interverrebbero solo in un secondo tempo, quando si tratta di *contare,* ma queste ammissioni non giustificano ancora l'asserzione che il concetto di numero si esaurisca in « una emanazione diretta delle pure leggi del pensiero ». Esso infatti implica in se stesso un contenuto che abbiamo tentato di chiarire nelle pagine precedenti e la cui misconoscenza porta incompletezza e difficoltà nella stessa deduzione aritmetica.

La critica moderna del concetto di numero è nata nel tentativo di distinguere e separare con ogni precisione la scienza dei numeri dalla scienza dello spazio (geometria). In quest'ultima si era infatti rivelato incontestabilmente, colla nascita delle geometrie non-euclidee, un elemento empirico irriducibile, che sembrava assente dalla pura teoria dei numeri. Fin dal lontano 1829, il Gauss (59) distingueva nettamente la Geometria e la Meccanica dall'Analisi, per essere il numero un puro prodotto della mente. Il risultato della critica, compiuta in questo senso, si deve dire senz'altro positivo, ma salvare il concetto di numero da ogni incrostazione empirica non vuol dire ancora ridurlo a pure leggi logiche. Il nucleo di contenuto che lo costituisce, non solo non è un prodotto della logica

(57) Invece D. Hilbert rifiuta tale tesi, nella persuasione che le proposizioni aritmetiche contengano giudizi sintetici a priori. Altrettanto pensano gli intuizionisti che sottolineano il carattere intuitivo delle discipline matematiche fondamentali.

(58) *Was sind...* cit., trad. it., pp. 9-10.

(59) In una lettera al Bessel, cit. da F. Enriquez, *I numeri reali* in « Questioni riguardanti le matematiche elementari », Bologna, 1929, p. 233.

pura, ma anzi è da essa prerequisito perchè le semplici relazioni logiche si trasformino nelle più complicate relazioni matematiche (60).

ANGELO CRESCINI

(60) Il Carnap, pure lui sostenitore della tesi logicistica della matematica-ramo della logica (si veda per es. *Fondamenti di Logica e Matematica,* trad. di G. Preti, Torino, 1956, p. 49: « I calcoli matematici costituiscono un genere particolare di calcoli logici, distinguendosene soltanto per la loro maggiore complessità »), quando si propone di definire, seguendo il Frege e il Russel, i numeri e le operazioni aritmetiche rimanendo entro l'ambito del puro calcolo logico, dà questa definizione: « " *m* è un numero cardinale finito " sta per " per ogni (proprietà di numeri) K, se O è un K e, Per ogni *n* [se *n* è un K, *n*+ è un K] *m* è un K' » (p. 59). La parentesi rotonda, che sembra puramente marginale, è invece essenziale per la definizione. Quella proprietà K infatti non sarebbe sufficientemente determinata, non sarebbe una proprietà aritmetica. Ma essa d'altra parte rappresenta la necessaria precognizione del concetto di numero in generale. E' la stessa difficoltà incontrata dal Russel (cfr. *Introduzione...* cit., p. 35). Solo che costui si è preoccupato di premettere la definizione di numero in generale, la quale tuttavia a sua volta si è dimostrata per altre ragioni insufficiente.